Geometría de Minkowski

Alonso Sepúlveda S.
Instituto de Física
Universidad de Antioquia
Medellín, diciembre de 2011

CONTENIDO

1. **El plano cartesiano** 3

1.1 Sistemas coordenados 3
1.2 Rotación de coordenadas en el plano 3

2. **Relatividad especial** 7

2.1 Los principios 7
2.2 Transformación de Lorentz 8
2.3 El tiempo como coordenada 11
2.4 Aplicaciones 12
2.4.1 Límite galileano 12
2.4.2 Adición de velocidades 13
2.4.3 Contracción de longitudes 13
2.4.4 Dilatación temporal 14

3. **El espacio-tiempo** 15

4. **Gráficas de Minkowski** 16

4.1 Líneas de universo 16
4.2 Sistemas de referencia en movimiento uniforme 19
4.3 Curvas de calibración 20
4.4 Los gemelos relativistas 22
4.5 Simultaneidad y sucesión 23
4.6 Relojes de luz 26
4.7 Orden temporal y causalidad 28

4.8 Contracción de longitudes 31
4.8.1 Varilla en reposo en S' 31
4.8.2 Varilla en reposo en S 33
4.9 Dilatación temporal 33

5. **Bibliografía** 34

1. El plano cartesiano

1.1. Sistemas coordenados

La posición de un punto en un plano puede precisarse mediante la introducción de un sistema cartesiano de coordenadas. En su forma más simple consiste en una red de líneas paralelas que intersectan en forma perpendicular a otra red de paralelas. El corte de dos perpendiculares cualquiera se escoge como origen respecto al cual se asignan las coordenadas (x, y) de un punto P, como se muestra en la figura $1a$.

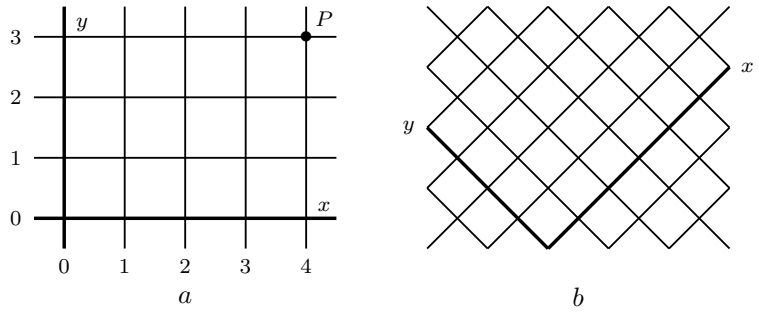


Figura 1: *a.* Sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. *b.* Rotación del sistema coordenado cartesiano

Las coordenadas del punto P en la figura $1a$ son (4,3). Puesto que la orientación del sistema coordenado es de libre escogencia, el mismo punto en el sistema rotado de la figura $1b$ tiene coordenadas (x', y') que dependen del ángulo de rotación y de si el origen del sistema coordenado (x', y') coincide o no con el origen del sistema (x, y).

Es bastante usual que los ejes x y y se extiendan para cubrir valores negativos de las coordenadas.

El sistema de coordenadas de las figuras 1 es rectangular, pero pueden utilizarse coordenadas oblicuas como en la figura $2a$ construídas con dos familias paralelas que se intersectan en forma no perpendicular.

1.2. Rotación de coordenadas en el plano

La conexión entre dos sistemas cartesianos (rectangulares) de coordenadas (x, y) y (x', y'), con orígenes coincidentes y rotados el uno respecto al otro un ángulo θ, puede establecerse a partir de la figura $2b$, teniendo en cuenta que:

- del triángulo OAA':
  $OA = OA' \cos\theta = x \cos\theta$,

- del triángulo $PA'B'$:
  $AB = A'B' = PA' \operatorname{sen}\theta = y \operatorname{sen}\theta$,

- del triángulo ODE:
  $OD = OE \cos\theta = y \cos\theta$,

- del triángulo OAA':
  $CD = AA' = x \operatorname{sen}\theta$.

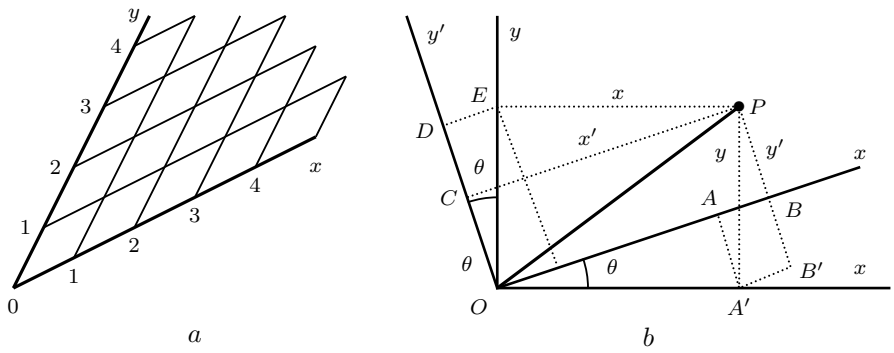


Figura 2: *a.* Coordenadas cartesianas oblicuas. *b.* Componentes cartesianas del punto P en dos sistemas cartesianos de orígenes coincidentes y rotados un ángulo θ

Además:

$$OB = x' = CP \qquad \text{y} \qquad OC = y' = PB.$$

Se sigue entonces:

$$\begin{aligned} x' &= OA + AB = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ y' &= OD - CD = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

La anterior es la regla de transformación de (x, y) a (x', y'). Es fácil verificar que la distancia OP es un *invariante*, es decir, tiene el mismo valor en ambos sistemas coordenados. En efecto:

$$x'^2 + y'^2 = (x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)^2 + (-x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)^2 = x^2 + y^2.$$

Recíprocamente, la regla de transformación (1) puede obtenerse de la invarianza de la longitud junto con la condición de que la transformación sea lineal. Así:

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy,$$

donde los coeficientes a, b, c, d son constantes que dependen solo del valor del ángulo θ. Entonces:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (ax + by)^2 + (cx + dy)^2 \\ &= (a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + d^2)y^2 + 2(ab + cd)xy \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

En consecuencia han de cumplirse las siguientes condiciones:

$$a^2 + c^2 = 1, \tag{2}$$
$$b^2 + d^2 = 1, \tag{3}$$
$$ab + cd = 0. \tag{4}$$

De (3) y (4) eliminando d, y en este resultado reemplazando a^2 con la ayuda de (2) se obtiene:

$$b = \pm c$$

Reemplazando esta expresión en (4) se sigue:

$$a = \mp d.$$

La regla de transformación es entonces:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= \pm bx \mp ay. \end{aligned} \tag{5}$$

En la útima ecuación hay entonces dos opciones:

$$x' = bx - ay \qquad \text{o} \qquad y = -bx + ay,$$

entre las cuales puede escogerse una, teniendo en cuenta que la regla de transformación (5) ha de contener la transformación de identidad $x'=x$, $y'=y$, correspondiente a $\theta = 0$. Esto implica que el signo escogido en (5) debe ser el inferior, esto es:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= -bx + ay. \end{aligned} \tag{6}$$

Finalmente, ha de introducirse θ en la evaluación de a y b. La forma más simple de lograrlo es dar la localización de un punto particular Q como en la figura 3, cuyas coordenadas son:

$$\begin{aligned} &(x, y) = (OQ\cos\theta, OQ\,\mathrm{sen}\,\theta) = (l\cos\theta, l\,\mathrm{sen}\,\theta), \\ &(x', y') = (OQ, 0) = (l, 0). \end{aligned}$$

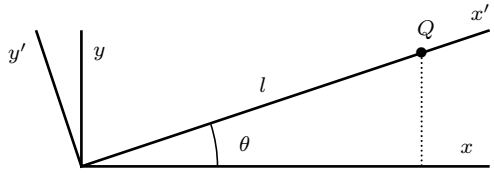


Figura 3: Geometría para la evaluación de constantes en las reglas de transformación entre sistemas cartesianos rotados

Reemplazando en (6) se obtiene $a{=}\cos\theta, b{=}\,\mathrm{sen}\,\theta$, con lo cual la regla de transformación es

$$\boxed{x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \qquad y' = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta}\,. \tag{7}$$

Este método, que utiliza la invarianza euclidiana de la longitud tendrá su equivalente en la geometría de Minkowski.

Ahora bien, el *invariante* fundamental de la geometría euclidiana es la distancia entre dos puntos. En forma general, para la pareja de puntos cuyas coordenadas son (x_1, y_1) y (x_2, y_2), es cierto entonces que la distancia que los separa es

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

y es invariante bajo rotación de coordenadas. En efecto, reemplazando (7) se sigue:

$$l'^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 = l^2.$$

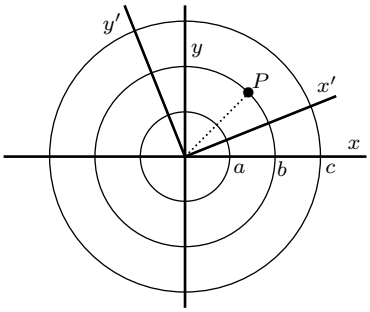


Figura 4: Las curvas de calibración para sistemas cartesianos de coordenadas (x, y) y (x', y') rotados son círculos

En particular si uno de los puntos es el origen coordenado y el otro tiene coordenadas (x, y) será cierto que:

$$l^2 = l'^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2. \tag{8}$$

En la figura 4 aparecen los dos sistemas coordenados y una familia de círculos que es la misma en ambos sistemas. Se conocen como *curvas de calibración*, pues sirven para marcar las unidades de medida. Si la ecuación de las curvas de calibración es (8) entonces las distancias a, b y c, en la figura 4, corresponden respectivamente a $l = 1, 2, 3$.

Esta breve introducción a la geometría analítica del plano será útil en el desarrollo de la geometría de Minkowski, que es la estructura geométrica que subyace a la relatividad especial de Einstein. Conviene, antes de introducir esta nueva geometría, hacer una presentación concisa de los fundamentos de la teoría de Einstein.

2. Relatividad especial

2.1. Los principios

En el número 17 de la revista alemana Annalen der Physik de junio de 1905, Einstein publicó un artículo en el que replanteó las nociones newtonianas sobre espacio y tiempo que dominaron la física durante 218 años. El artículo se inicia con la revisión de la noción de simultaneidad, que habría de conducir a la relativización de las medidas de los intervalos temporales y espaciales y de las nociones de sucesión y simultaneidad.

La relatividad especial se fundamenta en dos postulados:

1. *Principio de Relatividad*: Las leyes físicas tienen la misma forma matemática para todos los observadores inerciales en movimiento relativo.

   Se entiende que un sistema de referencia inercial es aquel donde, en ausencia de fuerzas, un cuerpo dejado en libertad permanece en reposo o se mueve rectilínea y uniformemente, y donde en presencia de fuerzas se mueve siguiendo la segunda ley de Newton de movimiento $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

   Debido a la restricción a sistemas inerciales, a la teoría de 1905 se le conoce como relatividad *especial*; la teoría *general*, expuesta en 1915 en el seminario de Hilbert en Gottinga, extiende el principio de relatividad a sistemas acelerados, esto es, no inerciales.

2. El segundo postulado afirma que la velocidad de la luz en el vacío es una constante universal, independiente del movimiento de la fuente que la emite, o del observador que la detecta o la emite, y de su frecuencia. Esta *constante universal* tiene un valor de $3 \times 10^8 m/s$.

   El segundo postulado exige revisar los fundamentos de la física, pues contradice las usuales nociones absolutas de sucesión y simultaneidad y en particular niega la validez de la regla galileana de transformación de velocidades,

$x' = x - Vt$ (véase figura 5), que asegura que la velocidad v'_x de un objeto, medida desde un vagón en movimiento es la resta de la velocidad v_x del objeto visto desde la estación y la velocidad V del vagón $v'_x = v_x - V$. Esta regla galileana asegura −contra el segundo postulado− que la velocidad de la luz depende del movimiento del sistema de referencia.

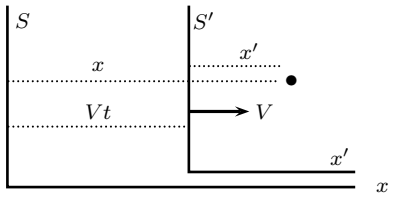


Figura 5: Transformación de Galileo

2.2. Transformación de Lorentz

Se entiende por sistema de referencia un sistema coordenado dotado de varillas de medir y relojes.

Supóngase que hay dos sistemas de referencia S y S'; que el primero corresponde a la estación del tren y el segundo a un vagón en movimiento uniforme con velocidad V, como se indica en la figura 6. Si en el momento en que los orígenes O y O' de S y S' coinciden una bombilla en el origen común lanza un destello, los dos observadores estarán de acuerdo en que la propagación de la luz se realiza en forma esférica y que la regla que rige su propagación es:

$$r = ct \quad \text{para } S \quad \text{y} \quad r' = ct' \quad \text{para } S'.$$

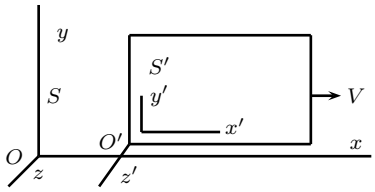


Figura 6: El sistema de referencia S' es inercial y se mueve uniformemente respecto a S

Ha de observarse que c tiene el mismo valor en S y S' de acuerdo con el segundo postulado. Estas expresiones pueden también escribirse:

$$\begin{aligned} &\text{en } S: \ r^2 = c^2t^2 \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0, \\ &\text{en } S': \ r'^2 = c^2t'^2 \qquad \text{o} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

A medida que la luz se propaga cambian las coordenadas de la esfera de luz en S y S' por lo cual $r \neq r'$, y en consecuencia, puesto que c es constante, ha de cumplirse que $t \neq t'$. En este punto hay ya una ruptura con las nociones newtonianas pues no se hablará más de un tiempo universal. Cada sistema de referencia deberá contar con su propio sistema de varillas y relojes para evaluar la posición y el momento de ocurrencia de cada acontecimiento.

De (9) es cierto que

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{10}$$

Debido a que el movimiento de S' se realiza solo a lo largo de x es posible demostrar (ver, por ejemplo, Resnick sección 2.2) que la regla de transformación de S a S' tiene una primera parte que asegura que:

$$y = y' \qquad \text{y} \qquad z = z'.$$

Si las leyes físicas han de tener la misma forma en S y S', no puede privilegiarse entonces a ninguno de los dos sistemas. Es posible demostrar que esto es cierto solo si la regla de transformación para x y t es *lineal*, esto es, si:

$$\begin{aligned} x' &= ax + b(ct), \\ ct' &= ex + f(ct). \end{aligned} \tag{11}$$

Sobre estas reglas de transformación debe anotarse que:

1. La primera es una generalización de la regla galileana que dice $x' = x - Vt$, donde V es la velocidad del sistema S' respecto a S.

2. La segunda regla transforma el tiempo. Asegura que, en consecuencia, el ritmo de los relojes en S y S' no es coincidente. No hay tiempo universal.

3. La transformación para x' y t' contiene x y t. Esto sugiere que la transformación de (x, t) a (x', t') es una especie de "rotación" de coordenadas. Parece, entonces, que el tiempo puede tratarse como una *coordenada*. Este punto será explorado en profundidad en las secciones 2.3 y 3.

Anticipando la noción de tiempo como coordenada se ha intoducido en (11) ct en vez de t, ct' en vez de t', para obtener una cantidad con dimensión de velocidad×tiempo que es distancia. Adicionalmente, a ct y ct' se les llamará, respectivamente, x_0 y x'_0. Entonces las reglas (11) pueden escribirse:

$$\begin{aligned} x' &= ax + bx_0, \\ x'_0 &= ex + fx_0, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{12}$$

Los coeficientes a, b, e y f dependerán obviamente de la velocidad V de S' respecto a S. Ha de observarse además que estas reglas aseguran que si para S: $(x, y, z, x_0) = (0, 0, 0, 0)$ entonces para S': $(x', y', z', x'_0) = (0, 0, 0, 0, 0)$. Esto significa que en el momento en que los orígenes coordenados coinciden, ambos relojes marcan cero. Así pues, al cruzarse los orígenes de coordenadas los relojes están sincronizados y marcan cero.

Ahora, si se reemplazan las ecuaciones (12) en (10) se sigue:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 - x'^2_0 &= (ax + bx_0)^2 + y^2 + z^2 - (ex + fx_0)^2 \\ &= (a^2 - e^2)x^2 + y^2 + z^2 - (b^2 - f^2)x_0^2 + 2(ab - ef)xx_0 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - x_0^2, \end{aligned}$$

de donde se obtienen las condiciones:

$$a^2 - e^2 = 1, \tag{13}$$
$$b^2 - f^2 = 1, \tag{14}$$
$$ab - ef = 0. \tag{15}$$

Eliminando f entre (14) y 15), y reemplazando luego a^2 de (13) se sigue:

$$b = \pm e$$

Reemplazando esta expresión en (15) se concluye que:

$$a = \pm f$$

Por tanto (12) es ahora:

$$x' = ax + bx_0,$$
$$x'_0 = \pm bx \pm ax_0.$$

Esta transformación debe contener la identidad ($x = x', x_0 = x'_0$), correspondiente a $V = 0$, lo que se logra si $a > 0$ y si en la anterior ecuación se escogen los dos signos superiores. Así:

$$x' = ax + bx_0,$$
$$x'_0 = bx + ax_0. \tag{16}$$

Basta ahora incluir V, lo que se logra si se piensa en que O' −en la figura 7− se desplaza uniformemente respecto a S siguiendo la definición de velocidad $x = Vt$, esto es:

$$x = Vt = \frac{V}{c}x_0.$$

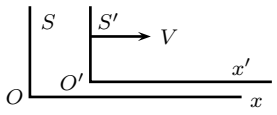


Figura 7: El origen coordenado O' se mueve uniformemente respecto a O

El punto O' está en reposo en S' y es su origen, por lo cual $x' = 0$. Reemplazando $x' = 0$ y $x = Vx_0/c$ en la primera de las ecuaciones (16) se obtiene:

$$x' = a(x - \beta x_0,$$
$$x'_0 = a(x - \beta x),$$

y reemplazando x' y x'_0 de estas ecuaciones en (10) se obtiene $a = 1/\sqrt{1-\beta^2} = \gamma$

De esta forma, las reglas (16) −a las que se conocen como *reglas de transformación de Lorentz*− toman la forma:

$$\boxed{x' = (x - \beta x_0)\gamma\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,, \quad x'_0 = (x_0 - \beta x)\gamma} \,. \tag{17}$$

2.3. El tiempo como coordenada

Obsérvese que asociadas a las reglas de transformación de Lorentz hay un *invariante*:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - x_0^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - x_0^2 = s'^2.$$

Si se interpreta x_0 como una *coordenada*, resulta una interesante analogía entre la rotación de coordenadas en el plano euclidiano (x, y) y una transformación de Lorentz en el "plano" (x, x_0). Sintéticamente la analogía tiene la forma:

$$\begin{array}{lcl} x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta & \rightarrow & x' = (x - \beta x_0)\gamma, \\ y' = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta & \rightarrow & x'_0 = (x_0 - \beta x)\gamma, \text{ además:} \\ x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 & \rightarrow & x^2 - x_0^2 = x'^2 - x'^2_0. \end{array}$$

Obsérvese que:

1. Ambos conjuntos de reglas de transformación son lineales.
2. En la tercera ecuación hay un signo "más" en la rotación coordenada y "menos" en la transformación de Lorentz. Esto significa que el invariante euclidiano es una suma de cuadrados, por lo cual la curva de calibración es un círculo. El signo "menos" en el segundo caso implica que el invariante es una resta de cuadrados por lo cual la curva de calibración es una hipérbola. El primer caso corresponde a la geometría euclidiana, el segundo a una geometría seudoeuclidiana, también llamada hiperbólica.

3. En el caso euclidiano aparecen funciones $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, que cumplen $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ correspondiente a la curva de calibración de un círculo unitario. Algo análogo ocurre con la curva de calibración hiperbólica si se hace $\gamma = \cosh\psi$ y $\beta\gamma = \operatorname{senh}\psi$, donde ψ es un ángulo asociado a funciones hiperbólicas que satisfacen $\cosh^2\psi - \operatorname{senh}^2\psi = 1$ correspondiente a una curva de calibración unitaria. Es cierto entonces que $\beta = \tanh\psi$. La forma de la tangente hiperbólica se muestra en la figura 8.

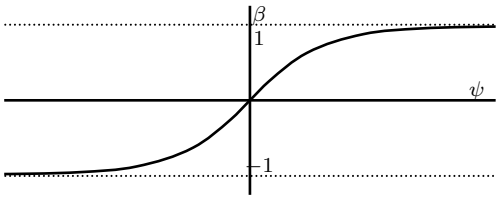


Figura 8: Gráfico de la función $\beta = \tanh\psi$

Nótese que la curva de la figura 8 se extiende desde $-\infty$ a ∞ para ψ, pero está restringida en β a valores ± 1, es decir $V = \pm c$, esto es $\beta = \pm 1$. Esto anuncia que en relatividad especial c es un límite superior para la propagación de señales.

2.4. Aplicaciones

Conviene ahora, antes de explorar en detalle estos temas, considerar algunos resultados de las transformaciones de Lorentz.

A) *Límite galileano*

La regla relativista de transformación se reduce a la propuesta por la física newtoniana en el límite de bajas velocidades, donde $V/c \ll 1$ y $\gamma \simeq 1$. Se sigue entonces, de (17):

$$x' = x - Vt \qquad t' = t,$$

lo que significa en particular que en este límite el tiempo puede no considerarse en S y S' como una cuarta coordenada sino como un parámetro absoluto.

B) *Adición de velocidades*

De (17) se sigue, formando el cociente $\Delta x'/\Delta x'_0$:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x'}{\Delta x'_0} &= \frac{\Delta x - \beta \Delta x_0}{\Delta x_0 - \beta \Delta x} = \frac{\Delta x/\Delta x_0 - \beta \Delta x_0/\Delta x_0}{\Delta x_0/\Delta x_0 - \beta \Delta x/\Delta x_0} \\ &= \frac{1}{c}\frac{v_x - V}{1 - V v_x/c^2} = \frac{\Delta x'}{c\Delta t'} = \frac{v'_x}{c},\end{aligned}$$

de donde se sigue la regla relativista:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - V v_x/c^2}.$$

De un modo análogo, formando $\Delta y'/\Delta x'_0$:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y'}{\Delta x'_0} &= \frac{\Delta y}{\gamma(\Delta x_0 - \beta \Delta x)} = \frac{\Delta y/\Delta x_0}{\gamma(\Delta x_0/\Delta x_0 - \beta \Delta x/\Delta x_0)} \\ &= \frac{1}{c}\frac{v_y}{\gamma(1 - V v_x/c^2)} = \frac{\Delta y'}{c\Delta t} = \frac{v'_y}{c},\end{aligned}$$

de donde:

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - V v_x/c^2};$$

análogamente:

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - V v_x/c^2}.$$

En el límite no relativista ($\gamma \simeq 1, V v_x/c^2 \ll 1$) se obtiene la regla galileana de adición de velocidades:

$$v'_x = v_x - V \qquad v'_y = v_y \qquad v'_z = v_z.$$

C) *Contracción de longitudes*

Medir en S la longitud de una regla AB, en movimiento con velocidad V y alineada en x (figura 9), implica determinar *simultáneamente* en ese sistema de refencia la posición de sus extremos; esto significa según (17):

$$x'_2 - x'_1 = [x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)]\gamma,$$

con $t_2 = t_1$. Por tanto:

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1)\gamma.$$

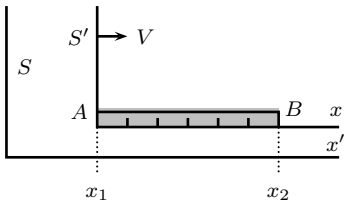


Figura 9: Una varilla en reposo en S' y en movimiento respecto a S aparece más corta que una varilla gemela en reposo en S

Si la longitud de la regla en S es $x_2 - x_1 = L$ y $x'_2 - x'_1 = L_0$ en S' (donde está en reposo) entonces: $L_0 = \gamma L$. Es decir que la longitud L de una regla en movimiento es *menor* que en reposo:

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Los objetos se acortan en la dirección de su movimiento.

D) *Dilatación temporal*

Un reloj permanece en reposo en el origen de S y otro idéntico está en el origen de S' (figura 10). Para obtener de (17) la regla inversa de transformación basta cambiar primas por no primas, cambiando tambien el signo de V. Esto corresponde a que si S ve a S' moverse hacia su derecha, S' verá a S moverse hacia su izquierda; así:

$$\begin{aligned} x &= (x' + \beta x'_0)\gamma, \\ x_0 &= (x'_0 + \beta x')\gamma. \end{aligned} \tag{18}$$

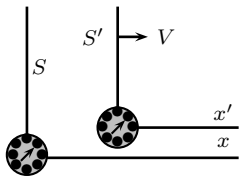


Figura 10: Relojes idénticos en S y S'. El reloj en S' marcha más lento según S. El reloj S marcha más lento según S'

De la segunda ecuación es cierto que si "tic" ocurre en t_1 y "tac" en t_2, entonces:

$$t_2 - t_1 = [t'_2 - t'_1 + \beta(x'_2 - x'_1)]\gamma.$$

Puesto que el reloj en S' permanece en reposo ($x'_2 = x'_1$) se cumple que:

$$t_2 - t_1 = (t'_2 - t'_1)\gamma.$$

Si $\Delta t = t_2 - t_1$ es el intervalo temporal marcado por el reloj en S, mientras $\Delta\tau = t'_2 - t'_1$ es el intervalo marcado por el reloj en S' se sigue que:

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

En consecuencia $\Delta\tau < \Delta t$, luego relojes en movimiento atrasan. La duración del intervalo entre el "tic-tac" de un reloj depende de su movimiento.

3. El espacio-tiempo

En su conferencia de 1908 ante la asamblea de científicos naturales en Colonia, titulada "Espacio y tiempo", el matemático Hermann Minkowski anunció: "...el espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo están condenados a convertirse en meras sombras, y solo una especie de unión de los dos preservará una realidad independiente". Esta nueva realidad física se llama el Espacio-tiempo.

En efecto, Minkowski propuso un nuevo escenario geométrico de los fenómenos naturales: un continuo de 4 dimensiones con coordenadas (x, y, z, ct), en el cual la velocidad de la luz en el vacío es una constante estructural de la geometría del universo.

En lo que sigue se explora este trabajo de Minkowski, que sin duda alguna constituye un aporte esencial a la física del siglo XX.

De acuerdo con la transformación de Lorentz, si $x{=}t{=}0$ se sigue que $x'{=}t'{=}0$, por lo que hay un instante en que relojes ubicados en los orígenes de S y S' coinciden. Sin embargo, un tiempo después, tal sincronización se ha perdido, y los observadores en S y S' no coinciden en los valores que miden para posiciones y tiempos. Esto implica que cada observador debe especificar para cada evento su posición y el momento de su ocurrencia, información que involucra cuatro cantidades (x, y, z, t) expresables también como (x, y, z, x_0), forma en la cual las cuatro cantidades tienen las mismas dimensiones. Esto significa que el tiempo puede medirse en metros. En efecto, 1 segundo corresponde a 300.000 km.

Un *evento* se define como un acontecimiento determinado por 4 números, su posición en el espacio y el momento de su ocurrencia. El conjunto de todos los puntos en este espacio de cuatro dimensiones se conocerá en lo sucesivo como el Espacio-tiempo o el Espacio de Minkowski.

Espacio y tiempo por separado no son absolutos pero el espacio-tiempo es un absoluto.

4. Gráficas de Minkowski

4.1. Líneas de universo

La geometría analítica del espacio-tiempo requiere la introducción de cuatro ejes de coordenadas, tres espaciales y uno temporal, de modo tal que la distancia entre dos eventos separados infinitesimalmente es:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (dx_0)^2 \\ &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2. \end{aligned}$$

Este elemento de línea supone la existencia de una geometría de tipo hiperbólico, caracterizada por la presencia del signo negativo. Contiene el elemento diferencial de distancia espacial $dl^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$; en relatividad especial, la distancia entre dos puntos en el espacio 3D *no* es invariante. El nuevo invariante es ahora ds^2.

Puesto que no es posible representar gráficamente cuatro líneas perpendiculares, los diagramas que siguen contendrán al máximo tres coordenadas (x, y, x_0) y usualmente se restringirán a dos, (x, x_0), como en la figura 11.

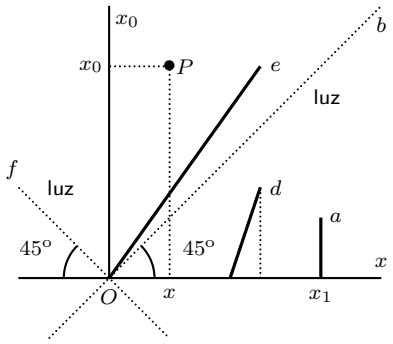


Figura 11: Líneas de universo

Un punto P en el espacio-tiempo, se localiza con las coordenadas (x, y, z, x_0), y corresponde a un *evento*. No es un punto en el espacio sino un *acontecimiento*, o, en palabras de Minkowski, un "punto de universo".

En la figura 11 la porción a de recta representa un punto o una partícula en reposo en x_1, que solo avanza en el tiempo. La línea Ob que forma un ángulo de 45° con el eje x tiene como ecuación $x = x_0$, es decir $x = ct$, que corresponde a un rayo de luz que pasa por el origen coordenado y se mueve en eje x positivo. Un haz de luz que pasa por el origen y se mueve en el eje x negativo se describe con $x = -ct$.

El eje horizontal puede señalar puntos con coordenadas positivas o negativas, como ocurre también con y y z, no representadas en la figura 11. El eje x corresponde a $x_0 = 0$, es decir $t = 0$, al que se llama el *presente*. Los puntos $x_0 < 0$ corresponden al *pasado* y $x_0 > 0$ al *futuro*. Se entiende que la descripción de eventos físicos va del pasado al futuro; por ejemplo, la luz se mueve de O hacia b, la partícula a localizada en x_1, no se desplaza en el espacio pero sí en el tiempo y en la dirección vertical ascendente, es decir, hacia el futuro.

La línea d corresponde al movimiento *uniforme* de una partícula. Uniforme pues su "línea de universo" es una recta cuya ecuación es: $x = vt = \beta x_0$. Como $\beta = v/c = (dx/dt)/c = dx/dx_0$ y como $dx < dx_0$ (pues el ángulo que la línea d forma con el eje x_0 es menor de 45°) entonces $\beta < 1$; así pues, líneas rectas cuya inclinación respecto a x_0 sea menor de 45° describen movimiento uniforme con velocidad menor que la de la luz. En consecuencia, la línea e corresponde a una partícula con movimiento uniforme $v < c$ que pasa por el origen $(0, 0, 0, 0)$.

A $x = x_0 = ct$ se le llama *línea de universo de la luz.*

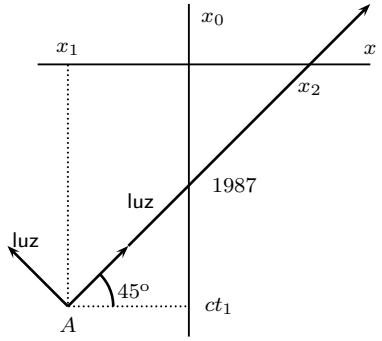


Figura 12: Diagrama de espacio-tiempo para la luz surgida de la supernova 1987A

En la figura 12 se representa una cadena de eventos que comienza en A con la explosión de la supernova 1987A, en una de las nubes de Magallanes, ubicada en x_1. La explosión ocurrió en t_1 (hace unos 170 000 años). La luz avanza hacia el futuro en las tres direcciones espaciales, de las cuales solo se representa el avance en x a izquierda y derecha.

Si estamos ubicados en $x = 0$, la luz nos alcanza en 1987, que queda en nuestro pasado. La luz continúa su avance y *ya*, es decir en el instante $t = 0$, se encuentra en el punto x_2 lejos de nosotros y continúa su avance hacia el futuro.

El tiempo es unidireccional, va del pasado remoto al futuro remoto. Las coordenadas espaciales van desde menos a más infinito. Aunque no puedan representarse

las 4 coordenadas sí pueden representarse 3, como en la figura 13*a* en la que aparecen el eje temporal x_0 y las coordenadas espaciales x y y. La recta $x = \pm ct$ de la figura 11 se convierte en $\sqrt{x^2 + y^2} = \pm ct$ que es la ecuación de un cono doble al que se conoce como el *cono de luz*. La pared del cono inferior está conformada por todas las líneas de universo de la luz que vienen desde el pasado y confluyen en el origen coordenado tetradimensional $(0, 0, 0, 0)$; mientras la pared del cono superior está formada por la luz que sale de $(0, 0, 0, 0)$.

Todas las partículas que salgan de $(0, 0, 0, 0)$ habrán de moverse con inclinación menor de 45° respecto al eje del tiempo x_0, pues de acuerdo con la relatividad especial las partículas de nuestro mundo pueden acelerarse desde el reposo y siempre tendrán velocidades $v < c$.

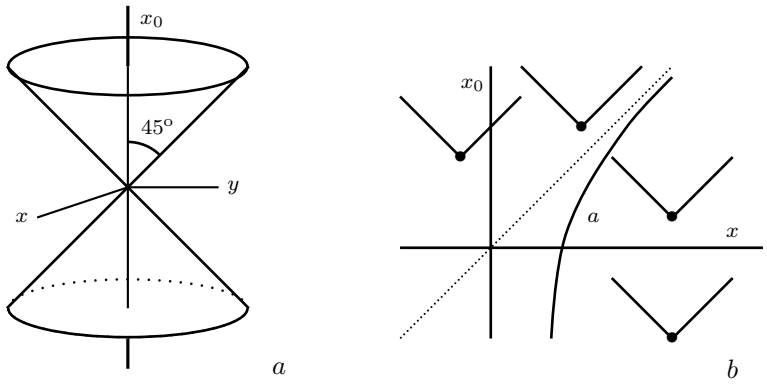


Figura 13: Conos de luz

El cono descrito es una representación simplificada ya que no se trata en general de $x = \pm ct$ que describe rectas, ni de $\sqrt{x^2 + y^2} = \pm ct$ que describe conos, sino de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \pm ct$ que describe superficies esféricas que colapsan a $(0, 0, 0, 0)$ desde el pasado $(t < 0)$ o que se expanden desde $(0, 0, 0, 0)$ hacia el futuro $(t > 0)$.

La figura 13*b* representa pulsos de luz emitidos en diferentes puntos del espacio-tiempo. Cada uno de ellos equivale al cono superior de la figura 13*a*.

Ahora bien, en la figura 11 y considerando las líneas d y e puede verse, tomando sus proyecciones en x y x_0, que una partícula viaja siempre más en el tiempo que en el espacio, o al menos −como en el caso de la luz− viaja lo mismo $(x = x_0)$.

Esto es cierto incluso para una partícula en reposo, que solo viaja en el tiempo. Líneas con inclinaciones mayores de 45° respecto al eje x_0 dan lugar a velocidades mayores que c, pues en tal caso $\beta = dx/dx_0 > 1$ ya que $dx_0 < dx$. Estas velocidades supraluminales dan lugar a radicales con argumento negativo en las diversas ecuaciones de la relatividad especial.

Partículas que comiencen su movimiento desde el reposo pueden cambiar pro-

gresivamente el ángulo de su línea de universo desde 0° asintóticamente hasta 45°, sin sobrepasarlo, como se muestra en la curva a de la figura 13b.

4.2. Sistemas de referencia en movimiento uniforme

La descripción se ha restringido hasta ahora a observadores en reposo en su sistema de coordenadas (x, y, z) y acompañados de sus propios relojes en reposo en su sistema. La dotación de varillas y relojes constituye un sistema de referencia S. Es posible encontrar observadores S' en movimiento respecto al sistema de referencia S. La relatividad especial se restringe a observadores inerciales, es decir a aquellos en reposo o en movimiento uniforme respecto a uno inercial.

La línea b en la fig 14a representa una partícula en movimiento uniforme en el sistema de referencia S. En efecto la recta b tiene la ecuación $x = \beta x_0$, esto es $x = (v/c)ct = vt$.

Así, un nuevo sistema de referencia S' donde tal partícula esté en reposo tiene como eje temporal x'_0, que corresponde a la recta cuya ecuación en S es $x = \beta x_0$. ¿Cuál es el eje x'? La respuesta es simple; ante todo tengamos en cuenta que si $x = x_0$ para la luz en S, entonces, de las ecuaciones (18):

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \gamma[x'_0 + \beta x' - (x' + \beta x'_0)] \\ &= \gamma(1-\beta)(x'_0 - x') = 0. \end{aligned}$$

por lo que: $x' = x'_0$. Esto significa que el sistema de referencia S' tiene ejes x'_0 y x' simétricos respecto a la línea de universo de la luz; en consecuencia el eje x' es el mostrado en la figura 14a. El ángulo que x' forma con x es el mismo que x'_0 forma con x_0. El eje x' corresponde −en S− a la recta $x_0 = \beta x$.

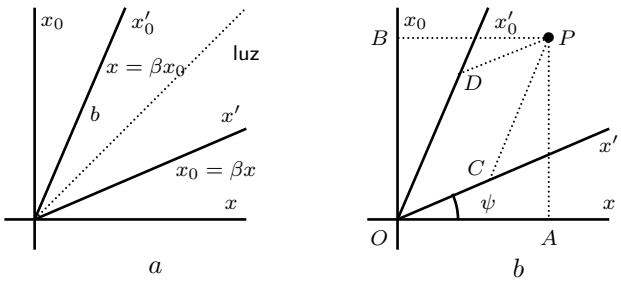


Figura 14: *a.* Sistemas de referencia en movimiento relativo uniforme. *b.* Coordenadas espacio-temporales de un evento en dos sistemas de referencia

Teniendo en cuenta, en acuerdo con la figura 2a, que las coordenadas de un punto se obtienen trazando líneas paralelas a los ejes coordenados resulta que las

coordenadas del punto P en S y S' son las que aparecen en la figura 14*b*, donde:

$$OA = x\,, \quad OB = x_0\,, \quad OC = x'\,, \quad OD = x'_0;$$

como se ve, la "rotación" del sistema coordenado no se realiza como en la figura 2*a*, pues ahora cada eje se acerca a la línea de universo de la luz.

Si el sistema S' se mueve hacia la izquierda, el eje x' estará debajo del x.

Los ejes x y x_0 no mantienen su perpendicularidad bajo "rotación" en el espacio-tiempo. Una transformación de Lorentz (17) es una *rotación hiperbólica* en el espacio de Minkowski.

4.3. Curvas de calibración

En el plano euclidiano la curva de calibración es $x^2 + y^2 = r^2$ y tiene la misma forma en un un S coordenado 2D rotado, pues $x'^2 + y'^2 = r^2$. Corresponde al invariante básico que es la distancia entre cualquier punto y el origen coordenado.

En la geometría de Minkowski en el plano (x, x_0) la curva de calibración es $x^2 - x_0^2 = s^2$ en S, que en S' se escribe $x'^2 - {x'_0}^2 = s'^2 = s^2$. Corresponden al intervalo espacio-temporal entre el origen coordenado común a S y S' y un evento arbitrario. La igualdad $x^2 - x_0^2 = x'^2 - {x'_0}^2 = s^2$ es fácilmente corroborada utilizando la transformación de Lorentz (17). También es cierto que $x_0^2 - x^2 = x_0'^2 - x'^2 = \boldsymbol{s}^2$ con $\boldsymbol{s}^2 = -s^2$.

Las dos familias de hipérbolas se representan en la figura 15*a*. En esta gráfica las hipérbolas a_1 y a_2 corresponden a $x_0^2 - x^2 = 1 = x_0'^2 - x'^2$, mientras b_1 y b_2 corresponden a las hipérbolas $x^2 - x_0^2 = 1 = x'^2 - x_0'^2$.

a. La intersección de $x_0^2 - x^2 = 1$ con $x = 0$ es $x_0 = \pm 1$, mientras la intersección de ${x'_0}^2 - x'^2 = 1$ con $x' = 0$ es $x'_0 = \pm 1$. Esto significa que las unidades de la coordenada temporal son $x_0 = 1$ en S y $x'_0 = 1$ en S'.

b. De un modo análogo, la intersección de la hipérbola $x^2 - x_0^2 = 1$ con $x_0 = 0$ da $x = \pm 1$, mientras la intersección de ${x'_0}^2 - x'^2 = 1$ con $x'_0 = 1$ genera $x' = \pm 1$. Estos cortes dan lugar a las unidades de coordenada espacial en S y en S'.

Fácilmente puede probarse, utilizando las transformaciones de Lorentz (18) que las coordenadas de Q en S son $(\gamma\beta, \gamma)$, ya que son $(0, 1)$ en S'. Es cierto entonces que 1 unidad de tiempo en S', esto es $x'_0 = 1$, corresponde a más de una unidad de tiempo en S, es decir, $x_0 = \gamma > 1$; ver figura 15*a*, lo que corresponde al retardo de relojes en movimiento.

Las unidades de medida para distancia y tiempo pueden extenderse con facilidad utilizando para la primera las hipérbolas $x^2 - x_0^2 = n^2 = x'^2 - {x'_0}^2$ y para la segunda $x_0^2 - x^2 = n^2 = {x'_0}^2 - x'^2$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$, como lo muestra la figura 15*b*.

Las hipérbolas −que son las curvas de calibración en el espacio de Minkowski− se suprimen en la figura 16, donde solo aparecen las correspondientes divisiones

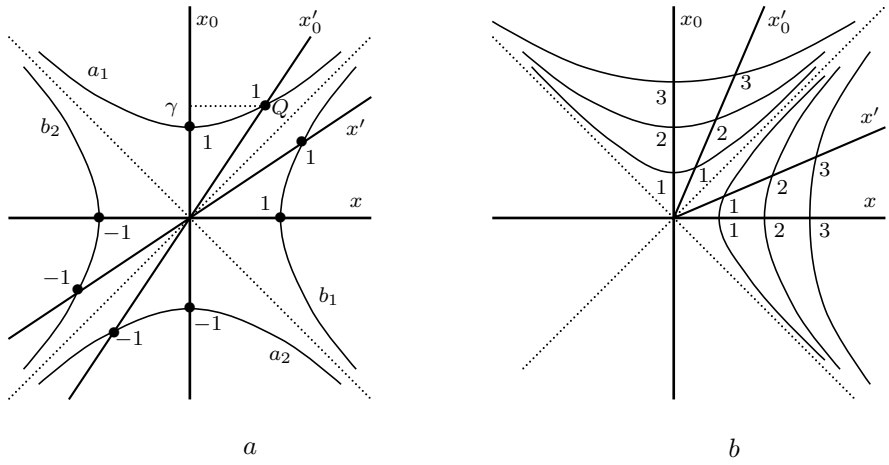


Figura 15: Las curvas de calibración permiten definir las unidades de espacio y tiempo en dos sistemas de referencia

espaciales y temporales en S y S', y una sola porción de hipérbola suficiente para la calibración de los ejes x' y x'_0.

Puede concluirse entonces que las unidades de medida utilizadas en un sistema de referencia no permanecen inalteradas cuando se proyectan sobre otro en movimiento. Esto significa que los relojes en movimiento no marchan a la misma rata que en reposo, por lo que no hay un "tiempo universal". Las unidades espaciales tampoco mantienen sus valores. Esto es fácilmente entendible teniendo en cuenta que el movimiento relativo entre sistemas de referencia puede describirse como un tipo de "rotación"; así como en la rotación euclidiana de un sistema de coordenadas no se mantienen invariantes las componentes x y y así tampoco en el caso de Minkowski se mantendrán invariantes las longitudes y los intervalos temporales.

Obsérvese con cuidado en las figuras 15 y 16 que mientras más se acerca el eje x'_0 a la línea de universo de la luz, mayor es la velocidad de S ($x = \beta x_0$) y más arriba se realiza el corte entre x'_0 y la hipérbola $x_0^2 - x^2 = 1$, lo que hace que la unidad de tiempo en S' vista por S sea cada vez mayor. A mayor velocidad más lento trabajan los relojes: un segundo en S' dura tanto más −según S− cuanto mayor sea β; pero para S' un segundo dura siempre lo mismo, pues a pesar de que cambie el corte según S, para S' siempre es $x'_0 = 1$.

La dilatación temporal, vista una vez más, se obtiene de $x_0^2 - x^2 = {x'_0}^2 - x'^2$ para el caso de un reloj que viaja con S'. En tal caso $x = \beta x_0$ y $x' = 0$ (pues el reloj está en el origen de S'), de donde $x_0^2 - \beta^2 x_0^2 = x_0'^2 - 0^2$, esto es: $x_0 = x'_0\gamma > x'_0$. Si S' registra 1 segundo, S registrará $x_0 = \gamma > 1$.

En la figura 16 se ve que para velocidades β pequeñas del sistema de referencia S', el corte Q se acerca a zonas donde la hipérbola es cada vez más plana y más

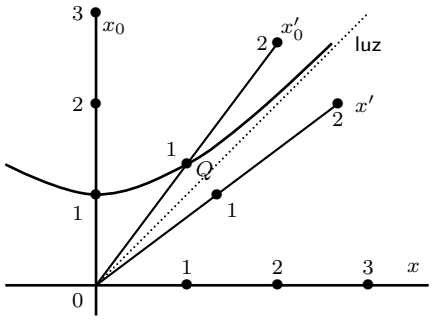


Figura 16: La intersección de la curva de calibración con el eje x'_0 define la unidad de distancia y tiempo en S' en referencia a la unidad correspondiente en el sistema S

horizontal, de modo que en las regiones cercanas al eje x_0, la diferencia entre las duraciones x_0 y x'_0 no es notoria. Esto significa que la diferencia en los registros de los relojes en S y S' es ignorable, caso en el cual es reutilizable la noción newtoniana de reloj universal.

4.4. Los gemelos relativistas

La relatividad especial da lugar a una situación de aparente paradoja que es fácilmente explicable utilizando la geometría de Minkowski.

Sean los gemelos Castor y Pólux. El primero permanece en el origen espacial de coordenadas O mientras el segundo emprende un viaje de ida y regreso (figura 17a). Luego de un breve período de aceleración en O, Pólux viaja con velocidad constante hasta A donde invierte la dirección de su viaje. Desacelera poco antes de A, hasta llegar al reposo en ese punto, donde se devuelve; acelera brevemente y continúa con movimiento uniforme hacia B. Nuevamente desacelera y llega al reposo en B.

Para efectos de simplicidad gráfica la inclinación de la línea de universo de Pólux se escoge de modo tal que la proyección del punto $x'_0 = 1$ sobre S da lugar a $x_0 = 2$, como muestra la figura 17a. Si cada división tiene duración de un año, la duración total del viaje medida por el reloj de Pólux es de 4 años, mientras el reloj de Castor registra 8 años. Los breves períodos de aceleración y desaceleración en O, A y B no cuentan en el tiempo total aunque dan lugar a que la línea de universo de Pólux sea muy diferente a la de su hermano. El punto central es que el gemelo viajero envejece más despacio y al regreso Pólux es más joven que Castor.

La figura 17b reproduce 17a en forma algo más general. Ahora Pólux realiza su viaje con aceleración todo el tiempo, lo que implica divisiones temporales desiguales en cada punto del recorrido, menores en los momentos de baja velocidad y mayores

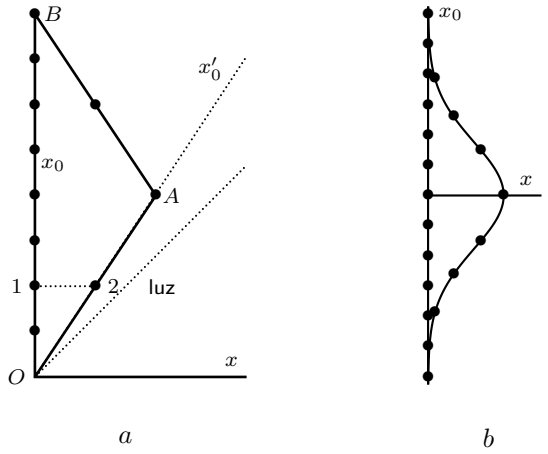


Figura 17: Los gemelos relativistas. *a.* Viaje uniforme de Pólux, con breves períodos de aceleración y desaceleración. *b.* Viaje continuo de Pólux

en los de alta. El tiempo total de viaje de Pólux se evalua realizando la integral temporal sobre la curva. Resulta que el tiempo es más corto para Pólux.

Aunque realmente el sistema de referencia S' de Pólux es acelerado, los intervalos temporales en cada momento del viaje pueden evaluarse utilizando la curva de calibración que corresponde al sistema de referencia inercial que en ese momento coincide con la velocidad de Pólux.

4.5. Simultaneidad y sucesión

De acuerdo con la filosofía y la física prerelativistas, simultaneidad y sucesión son dos categorías temporales asociables a los fenómenos de un modo absoluto. Si hay un par de eventos separados en el espacio, que para un observador ocurren simultáneamente, esta condición de simultaneidad es un absoluto, independientemente del movimiento de todos los posibles observadores. De igual modo, una pareja sucesiva de eventos lo será así para todos los observadores.

De igual forma, si en un sistema de referencia S se cuenta con un conjunto de relojes sincronizados, tal sincronización se mantiene cuando los relojes son observados desde un sistema de referencia S' en movimiento con velocidad constante arbitraria.

Estas aseveraciones no son ciertas desde el punto de vista relativista.

Considérese ante todo la situación mostrada en la figura 18a, en la que se muestran dos relojes A y B en reposo en S' y ubicados en el eje x'. Los dos relojes están sincronizados en S', vale decir, registran el mismo tiempo, como se sigue de la proyección de la línea BA en x_0'. Sin embargo las proyecciones de A y B sobre

x_0 son diferentes, y el reloj B está adelantado respecto al reloj A, marca un tiempo posterior. Así pues, relojes sincronizados en S' no lo están en S.

Recíprocamente, los relojes C y D (figura 18b) están en reposo en S y están sincronizados, como se ve de la proyección de DC en x_0. Pero la proyección de C y D en x'_0 revela que el reloj C está adelantado respecto a D.

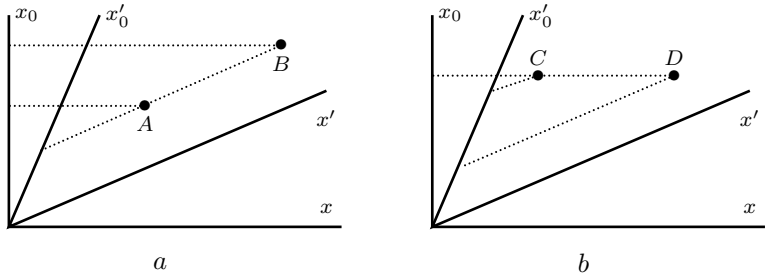


Figura 18: *a.* Eventos simultáneos en S' no lo son en S. *b.* Eventos simultáneos en S no lo son en S'

La sincronización de relojes no es un absoluto; puede darse en un sistema S y en todos los que respecto a él estén en reposo, pero no se realiza en *todos* los sistemas S' en movimiento.

En las figuras 18 los relojes están en puntos distintos del espacio para los dos observadores S y S', como se concluye después de proyectar A, B, C y D sobre los ejes x y x'.

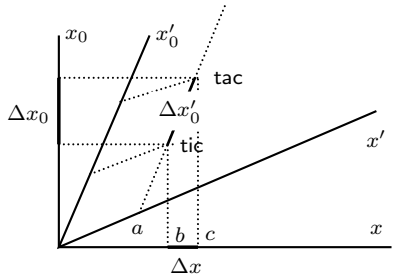


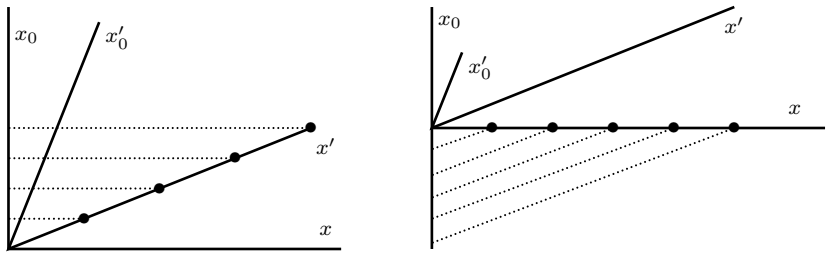
Figura 19: Las medidas de intervalos temporales difieren en dos sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo uniforme

En la figura 19 se muestra un reloj en reposo en el punto a de S'. Los dos eventos, "tic" y "tac" del reloj ocurren en el mismo punto del espacio en S' pero en puntos distintos del espacio b y c en S, a medida que el reloj se mueve. Además, la separación temporal entre "tic" y "tac" es diferente en S y S' como se sigue

de considerar la curva de calibración que permite trazar unidades de tiempo más amplias en S' que en S.

Así pues las duraciones no son las mismas en S y S'. En efecto, de $(\Delta x)^2 - (\Delta x_0)^2 = (\Delta x')^2 - (\Delta x'_0)^2$ con $\Delta x' = 0$ y $\Delta x = \beta \Delta x_0$ se obtiene $\Delta x'_0 = \sqrt{1-\beta^2}\Delta x_0$ lo que implica que el reloj en movimiento marcha a una rata $\sqrt{1-\beta^2}$ más lenta que en reposo.

¿Qué puede concluir el observador S' si el reloj está en reposo en S?



a b

Figura 20: Relojes sincronizados en un sistema de referencia no lo están en otro en movimiento

Ahora bien, considérese una colección de relojes igualmente espaciados en el eje x' de S' como en la figura 20a, donde los relojes aparecen sincronizados. Todos marcan cero en S' en el instante representado. Como se concluye de la proyección sobre x_0, resulta que mientras más alejados en x' se encuentren los relojes más adelantados estarán según S.

En la figura 20b un conjunto de relojes sincronizados en S y marcando cero, no lo están en S'. Mientras más lejos se encuentren en x más retrasados estarán.

En 20a relojes sincronizados en S' no lo están en S. En la figura 20b los relojes sincronizados en S no lo están en S'.

La sincronización, la sucesión y la simultaneidad no son conceptos absolutos.

Finalmente, considérese el conjunto de eventos de la figura 21:

- A y B son simultáneos en S'; en S el evento A ocurre primero que B.
- C y D son simultáneos en S; en S' el evento D ocurre primero que C.
- E y F ocurren en el mismo punto del espacio en S', primero E y luego F; este orden temporal se preserva en S, aunque ocurren en puntos diferentes del espacio y con un intervalo temporal diferente.

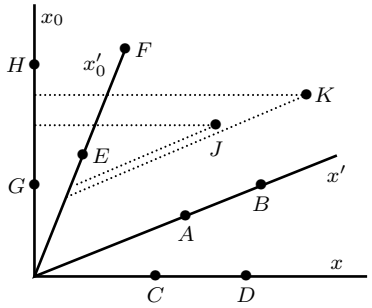


Figura 21: Estudio de la dependencia del orden temporal de parejas de eventos en diferentes sistemas de referencia

- G y H ocurren en el mismo punto del espacio en S primero G y luego H, y el orden temporal se preserva en S', aunque ocurren en puntos distintos del espacio y con un intervalo temporal diferente.

Si se proyectan los eventos J y K en x_0 y x_0' se verá que en S ocurre primero J y luego K, mientras en S' ocurre primero K y luego J. La pregunta pertinente es: ¿No implica esto, acaso, una violación de relaciones causales? ¿No es físicamente inconsistente que el orden temporal entre eventos dependa del sistema de referencia? Este tópico será estudiado en la sección 4.7.

4.6. Relojes de luz

Supóngase un par de espejos planos paralelos entre los cuales viaja perpendicular a las paredes un pulso de luz. Asúmase que la separación entre los espejos es de 1 metro. De un espejo a otro la luz tarda entonces $10^{-8}/3$ segundos. Este es un reloj de luz. En la figura 22a se representa un reloj de luz en S y en 22b un reloj de luz en S'. Como se vé en la figura 22a el pulso de luz viaja de un espejo al otro repetidamente trazando una línea de universo en zigzag. La línea de universo del espejo A en S es el eje x_0 y del espejo B es el eje x_0 con $x = 1$.

En la figura 22b A y B son las líneas de universo de los dos espejos en reposo en S'.

Obsérvese que en ambas figuras el rayo de luz incidente y el reflejado (espacialmente antiparalelos) forman en el espacio tiempo ángulos de 90º.

En las figuras 23 se muestra un pulso de luz que se emite desde el punto que queda en la mitad de los dos espejos; en la figura 23a los espejos están en S, en la 23b están en S'.

Los eventos A y B que corresponden a la llegada de la luz a los espejos, observados desde S, (figura 23a) son simultáneos; pero no lo son desde el punto de

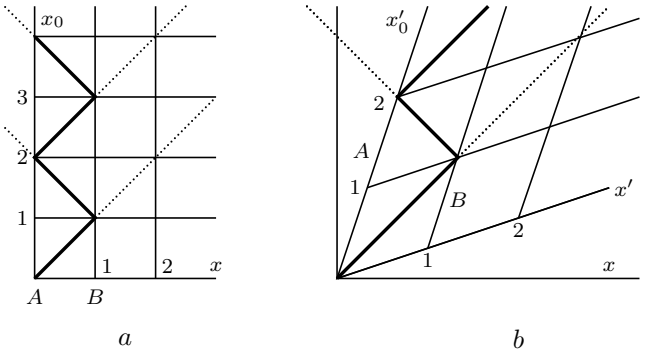


Figura 22: Relojes de luz. Trayectorias de la luz en el espacio-tiempo, *a.* en S, *b.* en S'

vista de cualquier S' en movimiento uniforme. Los eventos C y D (figura 23*b*) son simultáneos para S' pero no lo son para algún otro S.

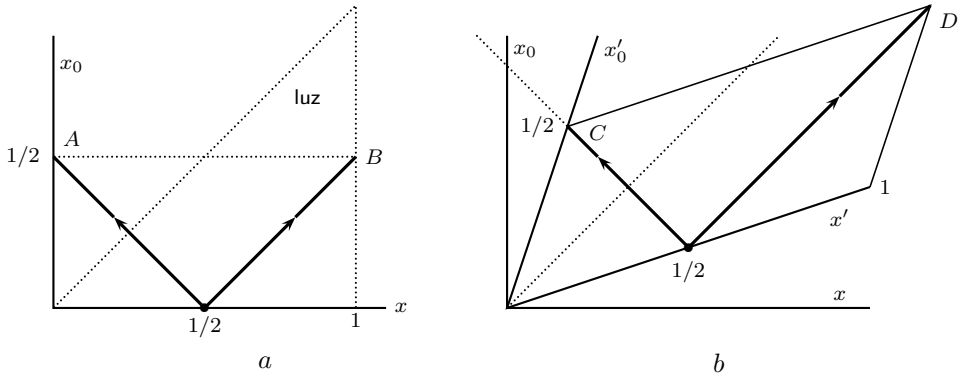


Figura 23: Un rayo de luz parte desde un punto y se propaga en direcciones opuestas y es observado, *a.* desde S, *b.* desde S', en movimiento respecto a S

Estos gráficos 23 son la representación de Minkowski del caso con que comienzan muchos textos de relatividad especial: desde la mitad de un vagón de un tren en movimiento se emite un pulso de luz. ¿A qué extremo del tren llega primero? La respuesta es: de acuerdo con el observador que va en el vagón, la llegada a ambos extremos (C y D) es simultánea pues la velocidad de la luz es una constante. Esto está descrito en la figura 23*b* con C y D simultáneos. Pero el observador S cuyo sistema es (x, x_0) verá que la luz llega primero a la parte trasera del vagón (C) que a la delantera (D), pues la velocidad de la luz es una constante. Para convencerse basta proyectar C y D sobre x_0.

4.7 Orden temporal y causalidad

A. El intervalo entre dos eventos es *temporaloide* si la inclinación de la línea que los une con el eje x es mayor de 45°. Se sabe que el eje x'_0 de un sistema S' en movimiento forma siempre un ángulo mayor de 45° con el eje x. Esto significa que para una pareja temporaloide de eventos es *siempre* posible encontrar un sistema S' donde los eventos se ubican sobre las línea x'_0. En la figura 24*a* se muestran dos eventos A y B. Observados desde S el evento A ocurre *antes* que B y ambos ocurren en lugares distintos del espacio. Observados desde S' (cuya velocidad es V_1) ocurren en el mismo lugar del espacio y A *antes* que B. Observados desde S'' (cuya velocidad es $V_2 > V_1$), ocurren en lugares diferentes del espacio y A *antes* que B.

En cualquier caso, para eventos A y B temporaloides el orden temporal se mantiene y en S' el intervalo entre ellos se reduce solo a tiempo ($\Delta x'_0$). Así, al ocurrir −para S'− en el mismo punto del espacio es posible que A sea la causa de B. Visto desde S un rayo de luz que saliera de A podría llegar al punto del espacio a −donde ocurre B− antes de que B ocurra; es decir que, según S, una señal con velocidad menor que la de la luz y que salga de A puede ser causa de B. Esta misma frase puede enunciarla cualquier otro observador S'.

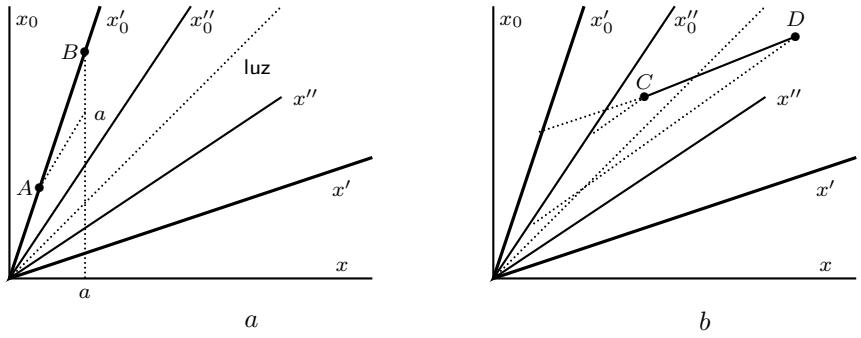


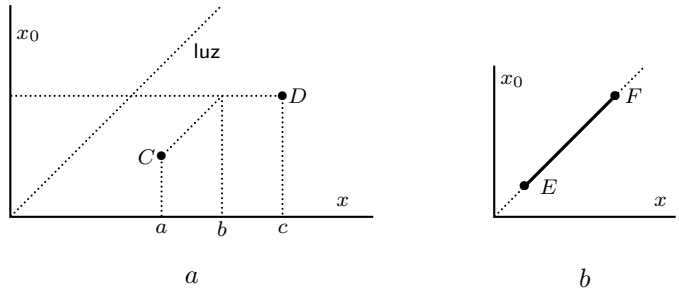
Figura 24: Estudios sobre el orden temporal de parejas de eventos

Puede así concluirse que siempre que exista la posibilidad de una conexión causal entre dos eventos, la línea que los une será temporaloide y el orden temporal entre los eventos será *absoluto*.

B. El intervalo entre dos eventos es *espacialoide* si la inclinación de la línea que los une es menor de 45°, respecto al eje x. Para una pareja de eventos de este tipo es *siempre* posible encontrar un sistema de referencia donde los eventos ocurran simultáneamente, es decir tal que su separación solo sea espacial. En la figura 24*b* se muestran dos eventos, C y D, separados espacial y temporalmente en S y con

C ocurriendo *antes* que D. En el sistema S' los eventos son *simultáneos* (obsérvese que la línea CD es paralela al eje x').

En el sistema S'' los eventos están separados espacial y temporalmente, pero ahora C ocurre *después* de D (obsérvese la proyección de C y D sobre el eje x_0''). Es claro que el orden temporal no se ha preservado; en S y S'' el orden es el opuesto, e incluso hay un S' donde C y D son simultáneos.



a b

Figura 25: *a.* Un rayo de luz que sale de C no alcanza a llegar al punto D antes de que el evento a él asociado ocurra. *b.* Intervalo luminoide

Resulta así que si el intervalo entre dos eventos es espacialoide, no hay orden temporal absoluto.

¿Qué sucede entonces con la conexión causa-efecto?

En la figura 25a aparecen otra vez los eventos C y D de la figura 24b. Si en el momento de la ocurrencia de C $-$en el punto $a-$ se emite hacia D $-$localizado en $c-$ un pulso de luz, resultará que el rayo de luz apenas va en b cuando D ocurre. Es decir, un pulso de luz, que viaja con la máxima velocidad permitida, no es capaz de conectar C y D. Si la luz no lo hace, nada lo hará, pues cualquier otra señal viaja con $v < c$. Así pues, eventos con separación espacialoide como CD no pueden conectarse causalmente. Lo que la teoría dice es entonces lo siguiente: *eventos no conectables causalmente tampoco tienen orden temporal absoluto.*

C. El intervalo entre dos eventos E y F es *luminoide* si la inclinación de la línea que los une es de 45° (figura 25b). En tal caso el intervalo $(\Delta x)^2 - (\Delta x_0)^2$ es nulo: $\Delta x = \Delta x_0$, es decir, $\Delta x = c\Delta t$, como es cierto para propagación de la luz. No hay en este caso sistema de referencia donde la separación de los eventos solo sea temporal. Vale decir que no existe sistema de referencia que viaje a la velocidad de la luz.

Una nota importante:

- Para un intervalo temporaloide $(\Delta x)^2 - (\Delta x_0)^2 = (\Delta x')^2 - (\Delta x_0')^2$ y como es

posible encontrar un S' donde $\Delta x' = 0$ entonces:

$$(\Delta x)^2 - (\Delta x_0)^2 = -(\Delta x_0')^2 = s^2$$

por lo que para un intervalo temporaloide: $s^2 < 0$.

- Si el intervalo es espacialoide es posible encontrar un S' donde $\Delta x_0 = 0$, es decir:
$$(\Delta x)^2 - (\Delta x_0)^2 = (\Delta x)^2 - (\Delta x_0')^2 = (\Delta x')^2 = s^2$$
de modo que para un intervalo espacialoide: $s^2 > 0$.

- Finalmente, para un intervalo luminoide: $s = 0$.

Como ilustración considérese el siguiente caso:

Las erupciones que ocurren en la superficie del Sol generan una lluvia de luz y de partículas que viajan por el espacio y alcanzan a llegar a la superficie de la Tierra alterando las telecomunicaciones. El Sol está situado a unos 150×10^6 km de nosotros, de modo que su luz tarda unos 8 minutos en llegar a la Tierra.

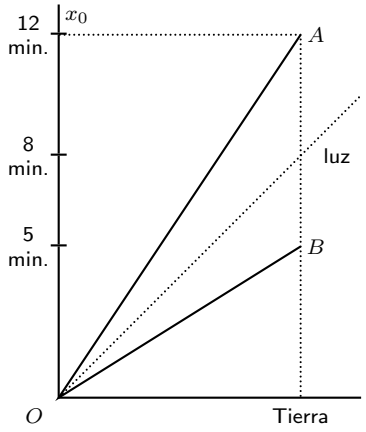


Figura 26: Solo la señal proveniente del Sol que demora al menos ocho minutos en alcanzar la Tierra puede ser causa de algún evento terrestre

Supóngase que hay una tormenta solar en $x_0 = 0$ en el punto O y que unos 12 minutos después se alteran las telecomunicaciones en la Tierra (figura 26). Esto significa que una señal con $v < c$ *pudo* haber viajado desde el Sol y causar el fenómeno terrestre. En este caso la luz tuvo tiempo para llegar antes de la lluvia de partículas. El Sol pudo ser la causa del evento A.

Pero si la alteración en las telecomunicaciones ocurrió 5 minutos después de la erupción solar, ni siquiera la luz tuvo tiempo para viajar entre el Sol y la Tierra, por lo que el Sol *no pudo* ser causa del evento B. La luz apenas iba en a en el momento de la ocurrencia de B.

Si la situación es A y hay la posibilidad de una conexión causal, *todos* los observadores estarán de acuerdo en que, haya sido el Sol o no la causa, el orden de los acontecimientos es: primero la tormenta solar, luego el evento A. Y esta conclusión es independiente del movimiento de los observadores. *Hay orden temporal absoluto.* Pero si el evento es B, y no hay por tanto posibilidad de conexión causal entonces un observador terrestre dirá que primero fue la tormenta solar y luego B, en tanto que algún otro observador en movimiento podrá asegurar que primero fue B; un tercer observador, con otro movimiento, podrá asegurar que fueron simultáneos. No hay contradicción, pues *si no hay posibilidad de conexión causal el orden temporal es relativo.*

El intervalo OA es temporaloide. El intervalo OB es espacialoide.

4.8. Contracción de longitudes

En las dos siguientes secciones estudiamos la longitud de varillas en dos sistemas de referencia.

4.8.1. Varilla en reposo en S'

Una varilla, en reposo en S' en la figura 27a, es una *superficie de universo.* Una varilla describe una superficie en el espacio-tiempo, esté o no en movimiento. Cada uno de sus puntos describe una línea de universo.

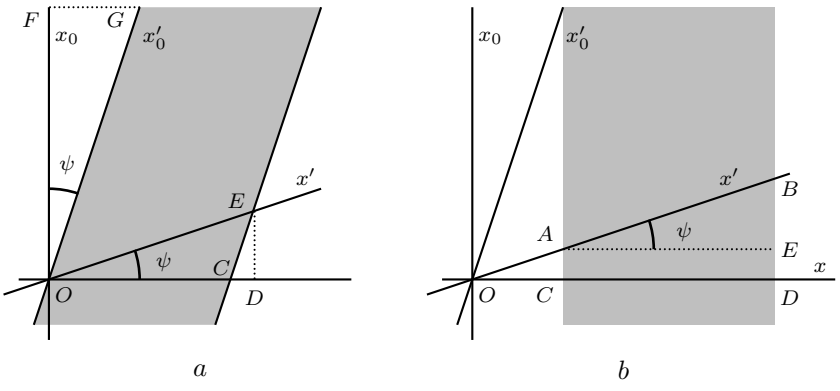


Figura 27: Medidas de la longitud de una varilla, *a.* en reposo en S', *b.* en reposo en S

La longitud en reposo de la varilla en S' es $OE = L_0$ correspondiente a $x'_0 = 0$. El punto O es el mismo para S y S' y coincide con $(0, 0, 0, 0)$.

La longitud de la varilla en movimiento medida por S está dada por el corte horizontal de la superficie sombreada. Esto equivale a fijar *simultáneamente* desde S los extremos de la varilla, O y C. Entonces $L = OC$, correspondiente a $x'_0 = 0$ (figura 27a).

Las coordenadas de E en S son $(\Delta x, \Delta x_0)$ con:

$$\Delta x \equiv OD = OC + CD. \tag{19}$$

En la anterior ecuación $OC = L$, también:

$$\tan\psi = \frac{FG}{FO} = \beta = \frac{CD}{\Delta x_0},$$

de donde $CD = \beta\Delta x_0$. Reemplazando OC y CD en (19) se sigue:

$$\Delta x \equiv OD = OC + CD = L + \beta\Delta x_0. \tag{20}$$

Además, de la figura 27a:

$$\tan\psi = \frac{ED}{OD} = \frac{\Delta x_0}{L + \beta\Delta x_0} = \frac{CD}{ED} = \frac{\Delta x}{\Delta x_0} = \beta,$$

se obtiene:

$$\Delta x_0 = L\beta(1 - \beta^2)^{-1}. \tag{21}$$

Reemplazando (21) en (20):

$$\Delta x = L(1 - \beta^2)^{-1}. \tag{22}$$

En la expresión para la invarianza del intervalo,

$$(\Delta x)^2 - (\Delta x_0)^2 = (\Delta x')^2 - (\Delta x'_0)^2,$$

es cierto que $\Delta x'_0 = 0$ y $\Delta x' = L' = L_0$. La varilla está en reposo en S'. Reemplazando Δx de (22) y Δx_0 de (21) se concluye que:

$$L = L_0\sqrt{1 - \beta^2},$$

lo que implica como se vió antes (sección 2) que longitudes en movimiento se contraen.

4.8.2. Varilla en reposo en S

Un análisis equivalente puede hacerse si la varilla está en reposo S, como en la figura 27*b*. Ante todo téngase en cuenta que:

$$\tan\psi = \frac{BE}{AE} = \frac{\Delta x_0}{L_0} = \beta,$$

pues $AE = \Delta x = \beta\Delta x_0$. Entonces: $\Delta x_0 = \beta L_0$.

Ahora bien, la longitud de la varilla en S, donde está en reposo es $L_0 = AE$. En S' es $L = AB$ con $x'_0 = 0$.

Entonces, en

$$(\Delta x)^2 - (\Delta x_0)^2 = (\Delta x')^2 - (\Delta x'_0)^2,$$

reemplazando $\Delta x = AE = L_0$, $\Delta x_0 = \beta L_0$, $\Delta x' = AB = L$, y $\Delta x'_0 = 0$, se sigue, como antes:

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

4.9. Dilatación temporal

Considérese un reloj en reposo en S' y midamos desde S un intervalo temporal Δx_0. Puesto que el reloj está en reposo en S es cierto que $\Delta x' = 0$. De $\tan\psi = \beta$ se sigue $\operatorname{sen}\psi = \beta\gamma$ (ver también sección 2.3), pero también, del triángulo ABC en la figura 28 se obtiene $\operatorname{sen}\psi = \Delta x/\Delta x'_0$, de donde $\Delta x = \beta\gamma\Delta x'_0$.

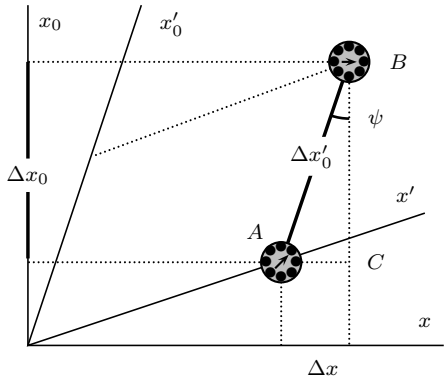


Figura 28: Reloj en movimiento uniforme

Reemplazando Δx y $\Delta x' = 0$ en

$$(\Delta x)^2 - (\Delta x_0)^2 = (\Delta x')^2 - (\Delta x'_0)^2,$$

se obtiene:

$$\beta^2\gamma^2(\Delta x_0')^2 - (\Delta x_0)^2 = -(\Delta x_0')^2,$$

por lo que, finalmente:

$$\Delta x_0' = \Delta x_0\sqrt{1-\beta^2},$$

lo que implica que el intervalo temporal medido en S' es menor que en S: relojes en movimiento atrasan.

5. BIBLIOGRAFÍA

-Born Max. *Einstein's theory of relativity*, Dover, New York, 1965.

-Einstein, A, Grünbaum, A. y otros. *La teoría de la relatividad*. Alianza Editorial, Madrid, 1993.

-Einstein, A, Infeld L. *La física aventura del pensamiento*. Losada, Buenos Aires, 1977.

-Feynman, R. *Feynman's lectures on physics*, vol I. Fondo Educativo Interamericano, Caracas, 1972.

-Goldstein, H. *Classical Mechanics*. Addison - Wesley, Reading, Mass, 1980.

-Minkowski, H. *Space and time*, en *The principle of relativity*, Dover, New York, 1924.

-Resnick, R. *Introducción a la teoría especial de la relatividad*. Editorial Limusa, México, 1977.

-Sepúlveda, A. *Los conceptos de la física*. Editorial Universidad de Antioquia, Medellín, 2003.